Partiel d'électromagnétisme — 18 nov. 2014

Ex 1 Questions de cours

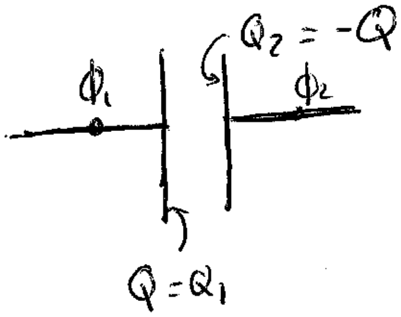
a) 1) Un condensateur est constitué de 2 conducteurs (C_1 et C_2) ayant deux surfaces S_1 ($\in C_1$) et S_2 ($\in C_2$) en influence totale (c'est à dire : toutes les lignes de champ $\vec{E}$ partant de l'une des surfaces arrivent sur l'autre)

$\Rightarrow$ S_1 et S_2 ont des charges opposées : $Q_2 = -Q_1$

Soient ϕ_1 et ϕ_2 les potentiels de C_1 et C_2.

La capacité C est la constante positive définie par : $Q_1 = C(\phi_1 - \phi_2)$

2) $E_{pot} \underset{\text{cours}}{=} \displaystyle\int_{P \in \text{distribution de charge}} \frac{1}{2}\, dq(P)\, \phi(P)$



$U = \phi_1 - \phi_2$

dans un condensateur :

- les charges Q_1 sont au potentiel ϕ_1
- " Q_2 " ϕ_2

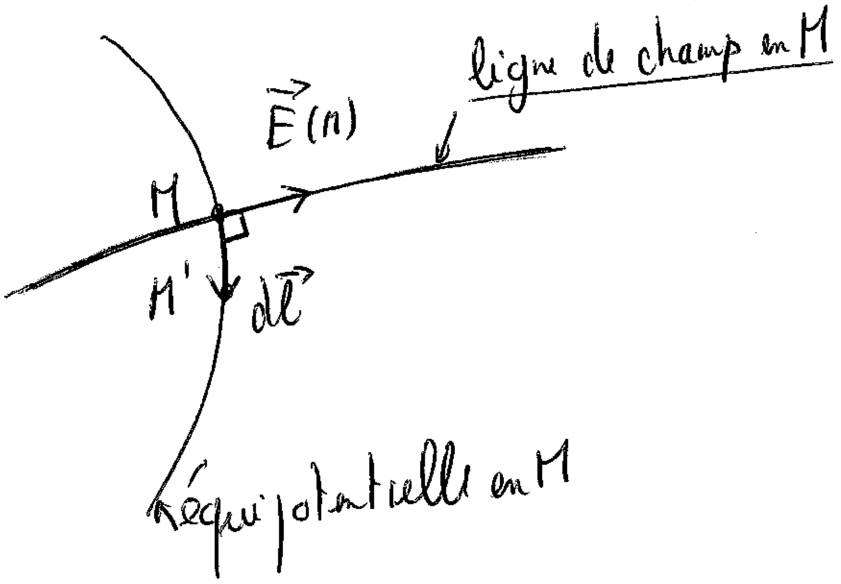
donc $E_{pot} = \displaystyle\iint_{P \in S_1} \frac{1}{2}\, dq(P)\, \phi_1 + \iint_{P \in S_2} \frac{1}{2}\, dq(P)\, \phi_2$

$= \frac{1}{2} Q_1 \phi_1 + \frac{1}{2} Q_2 \phi_2 = \frac{1}{2} Q(\phi_1 - \phi_2) = \frac{1}{2} Q U$

or $Q = CU$ donc $E_{pot} = \frac{1}{2} C U^2$

b) $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}\,\phi$

$d\phi = \overrightarrow{grad}\,\phi \cdot \vec{dl}$ } $d\phi = -\vec{E}(M) \cdot \vec{dl}$



Pour M fixé,

$\forall M' \in$ m équipotentielle que M

tel que $\vec{dl} = \overrightarrow{MM'}$

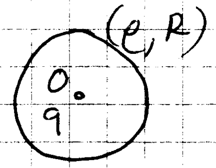
$d\phi = \phi(M') - \phi(M) = 0$

$\Rightarrow \vec{E}(M) \cdot \vec{dl} = 0$

donc $\vec{E}(M) \perp \overrightarrow{MM'}$ $\forall M' \in$ équipotentielle de M

donc l'équipotentielle en M est $\perp$ ligne de champ en M

Ex 2



a) $Q(r) = q + \iiint_{P \in \text{sphère } S(r)} \rho(P)\, d\tau$

$r \leq R$: $\boxed{Q(r) = q + \rho \iiint_{S(r)} d\tau = q + \rho \frac{4}{3}\pi r^3}$

$r \geq R$: $\boxed{Q(r) = q + \rho \iiint_{S(R)} d\tau = q + \rho \frac{4}{3}\pi R^3}$

b) • M repéré par coord. sphériques $M(r, \theta, \varphi)$

• Symétries : tous les plans contenant (OM) sont des plans de symétrie de la distribution de charges passant par M $\Rightarrow \vec{E}(M) = E(r, \theta, \varphi)\, \vec{u_r}$

• Invariants : la distribution de charge est invariante par rotation autour de O $\Rightarrow E(r, \theta, \varphi) = E(r)$

$\Rightarrow \boxed{\vec{E}(M) = E(r)\, \vec{u_r}}$

c) Appliquons le th. de Gauss sur sphère S(r) de centre O et de rayon r :

$$\oiint_{S(r)} \vec{E}(M) \cdot \vec{dS} = \frac{Q(r)}{\varepsilon_0} \quad , \ Q(r) \text{ calculé au a)}$$

or $\oiint_{S(r)} \vec{E}(M) \cdot \vec{dS} = \oiint_{S(r)} E(r)\vec{u_r} \cdot dS\, \vec{u_r} = E(r) \oiint_{S(r)} dS$

$= E(r)\, 4\pi r^2$

• pour $r \leq R$: $\boxed{E(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} + \frac{\rho \frac{4}{3}\pi r^3}{4\pi\varepsilon_0 r^2}}$

$\boxed{= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} + \frac{\rho}{3\varepsilon_0} r}$

• pour $r \geq R$: $\boxed{E(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} + \frac{\rho}{3\varepsilon_0} \frac{R^3}{r^2}}$

Rq : E(r) bien continu partout sauf en r = 0 où E diverge.

d) $\vec{E}(M) = -\vec{grad}\,\phi(M) \Leftrightarrow d\phi = -\vec{E}(M)\cdot d\vec{OM}$

$= -E(r)\vec{u_r}\cdot d\vec{r} = -E(r)\,dr$

• pour $r \geq R$ $\quad d\phi = -\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\,dr - \dfrac{\rho}{3\varepsilon_0}\dfrac{R^3}{r^2}\,dr$

$\Rightarrow \phi(r) = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} + \dfrac{\rho}{3\varepsilon_0}\dfrac{R^3}{r} + C_1, \quad C_1 = cte$

or $\phi(r) \xrightarrow[r\to+\infty]{} 0 \Rightarrow C_1 = 0$

$$\Rightarrow \boxed{\phi(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} + \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\frac{R^3}{r}} \quad \text{pr } r \geq R$$

• pour $r \leq R$ $\quad d\phi = -\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} - \dfrac{\rho}{3\varepsilon_0}\,r\,dr$

$\Rightarrow \phi(r) = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon r} - \dfrac{\rho}{6\varepsilon_0}r^2 + C_2, \quad C_2 = cte$

or $\phi(r)$ continu partout pr une dist. de charges volumique

$\Rightarrow$ on doit avoir $\phi(r=R^-) = \phi(r=R^+)$

soit $\dfrac{q}{4\pi\varepsilon R} - \dfrac{\rho}{6\varepsilon_0}R^2 + C_2 = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon R} + \dfrac{\rho}{3\varepsilon_0}R^2$

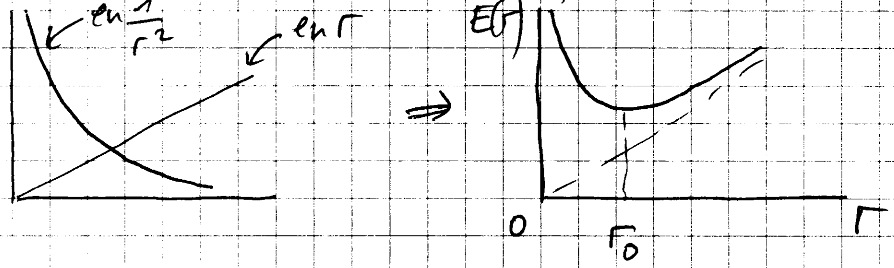
$\Leftrightarrow C_2 = \dfrac{\rho R^2}{2\varepsilon_0}$

Rq : $\phi(r)$ bien continu partout et diverge en $r=0$

$$\Rightarrow \boxed{\phi(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} - \frac{\rho}{6\varepsilon_0}(r^2 - 3R^2)} \quad \text{pr } r \leq R$$

e) • On prend q et ρ positifs

• Traçons l'expression de $E(r)$ pr $r \leq R$:

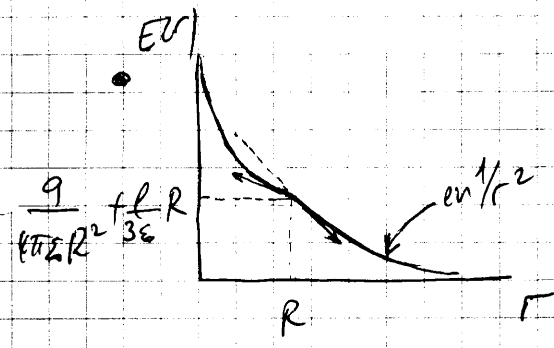


$\Rightarrow$ 2 cas selon que $r_0 > R$ ou $r_0 < R$.

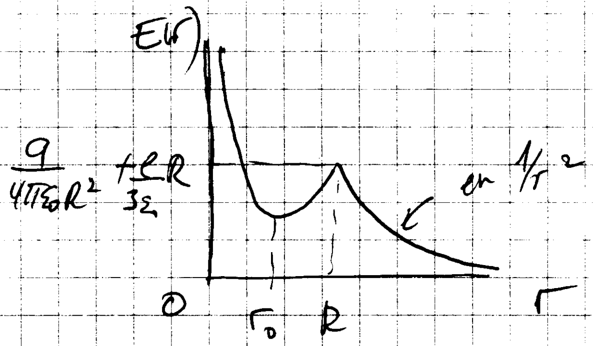
• Pente de $E(r)$ en $r = R^\pm$:

$\left.\dfrac{dE}{dr}\right|_{r=R^-} = -\dfrac{2q}{4\pi\varepsilon R^3} + \dfrac{\rho}{3\varepsilon_0}$ $\quad \Rightarrow \left.\dfrac{dE}{dr}\right|_{R^-} > \left.\dfrac{dE}{dr}\right|_{R^+}$

$\left.\dfrac{dE}{dr}\right|_{r=R^+} = -\dfrac{2q}{4\pi\varepsilon_0 R^3} - \dfrac{2\rho}{3\varepsilon_0}$

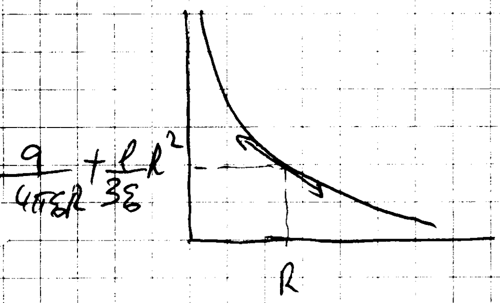


si $r_0 > R$

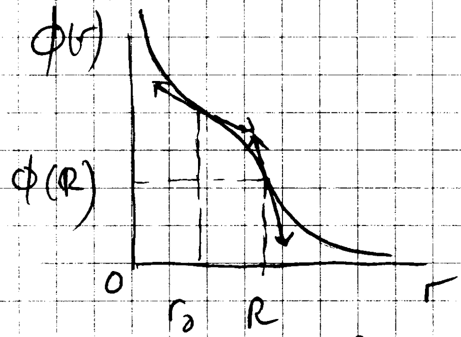


si $r_0 < R$.

• $\frac{d\phi}{dr} = -E(r) \Rightarrow -E(r) =$ pente de $\phi(r)$ continue partout car $E(r)$ continue partout



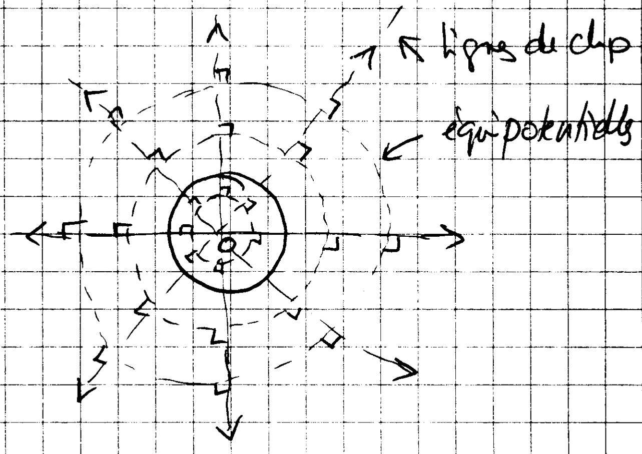
si $r_0 > R$



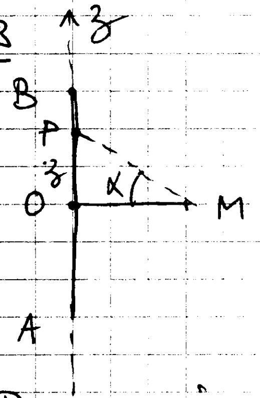
si $r_0 > R$

f) • les lignes du chp $\vec{E}$ sont les lignes tgtes à $\vec{E}$
$\Rightarrow$ ce sont les droites selon $+\vec{u_r}$

• les équipotentielles sont les surfaces $\perp$ à $\vec{E}$
$\Rightarrow$ ce sont les sphères de centre O



Ex 3



a) $\vec{OM} = a\,\vec{u_r}$ en cylindriques

les plans $(M, \vec{u_r}, \vec{u_z})$ et $(M, \vec{u_r}, \vec{u_\theta})$ sont des plans de symétrie de la distribution de charges passant par M $\Rightarrow$ $\boxed{\vec{E}(M) = E(a)\,\vec{u_r}}$

b) Pour pouvoir appliquer le th. de Gauss, il faut connaître la direction de $\vec{E}$ en tous les pts d'une surface fermée

Or on ne connaît la direction de $\vec{E}$ qu'aux pts $\in$ plan médiateur de [AB], plan qui est une surface ouverte

$\Rightarrow$ on ne peut appliquer le th. de Gauss ici

c) Calculons $\vec{E}(M)$ par l'intégrale de Coulomb :

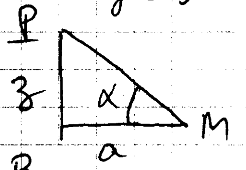
$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{P\in[AB]} \lambda\,dl\,\frac{\vec{PM}}{\|\vec{PM}\|^3}$$

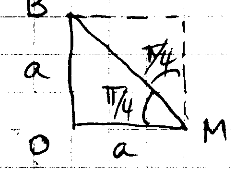
$$\Rightarrow E(M) = \vec{E}(M)\cdot\vec{u_r} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_{P\in[AB]} dl\,\frac{\vec{PM}\cdot\vec{u_r}}{\|\vec{PM}\|^3}$$

avec
- $dl = dz$, z variant de $-a$ à $+a$
- $\vec{PM} = \vec{PO} + \vec{OM} = -z\,\vec{u_z} + a\,\vec{u_r} \Rightarrow \vec{PM}\cdot\vec{u_r} = a$
- $\|\vec{PM}\|^2 = z^2 + a^2$

$$\Rightarrow E(M) = \frac{\lambda a}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-a}^{a}\frac{dz}{(z^2+a^2)^{3/2}} = \frac{\lambda a}{2\pi\varepsilon_0}\int_0^a \frac{dz}{(z^2+a^2)^{3/2}}$$

Changeons de variable : $z \to \alpha$





- $\tan\alpha = \dfrac{z}{a} \Rightarrow z = a\tan\alpha \Rightarrow dz = \dfrac{a}{\cos^2\alpha}\,d\alpha$
- $\cos\alpha = \dfrac{a}{\|\vec{PM}\|} \Rightarrow \|\vec{PM}\| = \dfrac{a}{\cos\alpha} \Rightarrow \dfrac{1}{(z^2+a^2)^{3/2}} = \dfrac{\cos^3\alpha}{a^3}$
- α varie de 0 à π/4

$$\Rightarrow E(M) = \frac{\lambda a}{2\pi\varepsilon_0}\int_0^{\pi/4}\frac{a}{\cos^2\alpha}\,\frac{\cos^3\alpha}{a^3}\,d\alpha = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 a}\int_0^{\pi/4}\cos\alpha\,d\alpha$$

$$= \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 a}\left[\sin\alpha\right]_0^{\pi/4} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 a}\,\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\lambda}{2\pi\sqrt{2}\,\varepsilon_0 a}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{E}(M) = \frac{\lambda}{2\pi\sqrt{2}\,\varepsilon_0 a}\,\vec{u_r}}$$